数学教育

数学教育に夢と楽しさを

成田　收

一　分科会における議論

1　百マス計算より「車のナンバーで10」はどう？

小学校からのレポートは、菊地三郎氏の「車のナンバーで10」のみであったが、その1本が秀逸であった。

北海道の数学教育において、全国一斉学力テストの結果が取りざたされ、特に「計算力」についてその結果が全国平均を下回っていることから、反復計算による「学力」回復がめざされ、その有力手段の一つとして百マス計算が取り上げられている。しかし、百マス計算は、喜びより、強制の色合いが濃く、やり方によっては算数嫌いを助長することにもなりかねない。このことに対して、長く数学教育を研究してきた氏は、４桁の数字からなる車のナンバーからたしざん、かけざん、ひきざん、わりざんで10を作る遊びにヒントを得て、このゲームのもつ楽しさ、冒険心をくすぐる奥深さを利用しながら、この遊びに「はまって」もらって知らず知らずのうちに計算力がつく方法を提唱している。

この遊びのルールを、具体的に説明すると、はじめに、10を作る方法を説明する。車のナンバーが６７８９ならば、たとえば、$6+\{8\div(9-7)\}=10$のように、各桁の数字は１回だけ使い、＋－×÷と括弧を自由に使い10を作るのである。

(1)　これを、最初は、１から９の数字から４つの異なる数字を選びこの課題を行う。
　高校生ならば、順序を考えるとこれらがすべてで３０２４種類、順序を無視すれば、１２６種類であることを計算で求めることを課題とする。

(2)　１２６種類の数を順序よくすべて書き出す。（これらをすべて提示する。）
　さらに、これら一つ一つについて10を作る課題に取り組む。
　氏によると、この可能な組合せはすべてで１２６種であり、これらはすべて、可能な解答が存在することを証明済みである、とのことである。その証明方法は、

有限個の問題なので、一つ一つの問題に具体的な回答を与えればそれで証明されるとして、すべてに解答を与えたとのことである。

この種の問題における難問は、３４７８の組合せであるという。

(3)　同じ数を複数含む４個の数の組合せについても考えると、今度は、可能な場合と不可能な場合があり、１１１や１１２２などは不可能だが、可能なものも多い。１１９９と１１５８は難問である。

この遊びには、筆者もはまってしまい、かなりの時間を使ってみたが、３４７８や１１５８は筆算ではとうとう解答を見つけることができなかった。悔しい思いをした。しかたがないので、コンピュータの支援を受けてやってみると、思いもつかなかった演算順によって整数の枠をはみ出すことによって可能だということがはじめてわかった。なかなか、奥の深いテーマで、十分楽しむ（苦しむ？）ことができた。

ところで、冒頭にも記したが、全国一斉学力テストの数の計算の部分が北海道において特徴的に低いことが取りざたされているが、氏は、その結果を受けて書かれた、ある新聞の記事を同時に紹介してくれている。その中で、記者は、道教委に取材し、「授業や家庭での反復学習で知識の定着を重点的に指導していきたい」とコメントさせている。また、道教委は学力向上対策チームを設け独自の問題集を作成しているなどの対策を講じているが、これが学校現場に十分に浸透していないことが低迷が続く原因だと、北海道教育大の教授に答えさせている。

考えるに、学力対策に責任を持つのは個々の教師であり、学校現場であり、父母と地域の協同である。その対策を教育政策の側で行い、「浸透」させるのは、行政による教育介入と呼ばれてもしかたのない行為であり、これらのことが、現場を忙しく窮屈なものにしている。しかも、その対策の根本が、「反復学習」にあると考えることが学習を無味乾燥なものにし、算数嫌いを助長させている疑いもぬぐえない。また、学力テストの成績が学力と直結するような底の浅い学力観では、教育が破壊されてしまう。

行政は本来の任務である、教育条件を豊かにすることに専念するとともに、教師に対する尊敬を持ってもらいたいものである。その上で、行政は、教師が子どもたちを目の前にして教育に専念できる時間と心の余裕と経済的基盤を用意してもらいたいものだと思う。

また、マスコミには、数値化される計算力のペーパーテストの成績のようなもののみに目を奪われることなく、豊かな学力を育てることが大切にされるような世論づくりの助けになるような活動をしてもらいたいものである。

2　比例反比例のワークシート

中学校からのレポートも山田美彦氏の「比例反比例のワークシート」1本であった。しかし、このレポートは、かけ算の意味を伝えると、比例も反比例も子どもたちが自由に操れることをしめすものであり、中学校のみならず、小学校にも、高校にも有用な考え方を示した、かけ算の本質を伝える授業書＝ワークシートとなっているものであった。

かけ算の本質は複線形性を持つ1×1を1に写す写像と理解することができる。これを視覚化する教具が掛割図である。速さと時間と道のりの関係は、時間が一定で、速さが2倍3倍になると道のりも2倍3倍になる。また、速さが一定で、時間が2倍3倍になると道のりも2倍3倍になる。この関係を、縦軸に速さをとり、横軸に時間をとってそこにできる長方形の面積として道のりを表現する。すなわち、

速さ×時間＝道のり

を長方形図式として理解する。このことが、氏の正比例のワークシートを使うことによって理解が確実なものとなる。

次に歯車の歯数と回転数と噛み数として、同じ関係、

歯数×回転数＝噛み数

を導入する。また天秤における、支点からの距離と重さとそこに生じるトルクの間にも同じ関係が、起こる。すなわち、

距離×重さ＝トルク

である。

このことから、二つの歯車がかみ合っているとき、噛み数が一定であるとして、歯数と回転数を考えると、反比例の関係が得られる。同様に、トルクが釣り合って、天秤が釣り合うとき、トルクが一定で、支点からの距離と重さに反比例の関係が生まれる。

実際には、次のような問題を考える。2つの歯車A、Bがかみ合っている。aは歯数が40で毎秒9回転している。Bは歯数がxで毎秒y回転している。このとき、x、yの対応表を作成しyをxの式で表すこと、また、歯車Bが毎秒10回転するためには、歯数をいくつにすればよいかを求めることを課題とする。

歯車A、Bで噛み数が一致するため、Aの噛み数40×9＝360はBの噛み数でもある。掛割図で、長方形の面積が360である。掛割図のイメージは次のようになる。

$$\begin{array}{c|c} \text{歯数}\,y & \text{噛み数}\,a \\ & 360 \\ \hline & \text{回転数 x} \end{array}$$

このとき、$xy=\mathrm{a}$と同時に、縦の棒線、横の棒線は分数の棒と同じだとイメージすることにする。図のイメージから、y棒$a=x, y=a$棒xすなわち、

$$y|a=x,\ \ y=\frac{a}{x}$$

をイメージすることにする。

結局、図のイメージと

$$x=\frac{a}{y}\ ,\ y=\frac{a}{x}$$

を重ね合わせておくことにするのである。

このイメージから、xが10、20、30、…のときのyの値はすぐに36、18、12、…と計算され、yをxの式で表すことは、いとも簡単に、$y=\dfrac{a}{x}$

となり、「歯車Bが毎秒10回転するためには、歯数をいくつにすればよいか」という課題についても、

$$x=\frac{360}{10}=36$$

が一度に計算されてしまうことになるわけである。

図式化と数式化の間のアナロジーを上手に利用したみごとな授業プランである。

3　フランスの教科書に見る指数関数

渡邊勝氏のレポートはフランスの高等学校の数学教科書を紹介したものである。なぜフランスなのかというと、そこには、日本の数学教育に見られる大きなゆがみに対する憂慮がある。日本では、１９７９年から共通1次試験が始まった。この試験は、入試問題の難問・奇問の出題をなくし、「入試地獄」を緩和することを提唱して導入されたものである。特徴は大学入試の1次試験として、全国一斉に行われるマークシート方式によるものであるということである。なお初代センター長の加藤陸奥雄によれば、フランスのバカロレアをモデルとする意向だったという。

その試験が、今は紆余曲折を経て、センター試験として実施されているが、このセンター試験の実施によって、入試地獄が緩和されたようには見えないばかりか、この試験がマークシート方式であることが主な理由となり、日本の高校生の高校卒業程度の学力のあり方が相当程度にゆがめ

られている。特に、数学においては、記述すること、自分なりの筋道でものを考えることが阻害されている。この傾向について、渡邊氏は、次のように述べている。

　センターテストが日本の若者の知的能力を低下させていると見る。

(1)　マークシート方式により、記述力が低下している。それはとりもなおさず思考力の低下を意味している。

(2)　限られた範囲の中から出題するため、問題が複雑煩瑣な手続きの短時間内処理を要求するようになり。測る学力を「迅速処理能力」に矮小化する。あるいは危険性がある。(このことは、特に数Ⅰで顕著)

(3)　「受験校」では、センターテスト対策をとり、類題「処理」に時間をかけて訓練している。数学学習の要である「問題を楽しむ」ことは消滅している。

(4)　生徒の中に「理屈はいいから、やり方だけ教えて！」「そんな面倒なことじゃなく、何かうまく処理する方法ありませんか?」など、「知的退廃」ともいうべき現象が起きている。

　氏は、大学入試改善のヒントとしてフランスのバカロレア（大学入学資格を得るための統一国家試験）に注目し、毎年行われるバカロレア試験の数学部分を翻訳し日本に紹介している。バカロレアは記述式試験であり、その求める内容は、証明せよ、解け、推論せよ、識別せよ、解釈せよ、計算せよ、存在するか、導け、詳細に述べよなど数学に本質的な多くのことを求めている。マークシート方式のテストで、数値等を求めることに終始しているセンター試験とは異なる。また、基本的なことを問いつつ、その内容は高度である。この高度な試験を、いわば、国家的規模の卒業直前の学年末考査として実現しているフランスという国の数学教育はどのようなものかに興味を持ち、その教科書を取り寄せ、指数関数部分について、日本語に翻訳して紹介してくれたのが今回のレポートである。

　その違いは、微分積分の基本的な概念を学習したすぐ後に、微分方程式 $f'(x)=f(x), f(0)=1$ の解として指数関数 $f(x)=\exp(x)$ を導入していることである。この関数のおおよそのグラフの姿を見るために、アフィン近似を利用したオイラー法による近似折れ線グラフを作り概形を知る。その後、この関数を解析していく中で、代数的性質として、累乗関数の性質を持つことを示し、$f(x)=\exp(x)=e^x$ と表している。この導入法は、累乗関数の拡張として指数関数を定義している日本の多くの教科書とはかなり異なり、自然界に多く存在する $y'=ay$ 型の微分方程式を自由に扱え

ることを意味する。

また、微分方程式$y'=ay$のみではなく、$y'=ay+b$の型の微分方程式を定数変化法により扱っている。この型を扱うことによって、空気抵抗のある落下運動（例えばパラシュートの落下運動）や、ニュートンの運動方程式を扱っており、より現実に近い世界を微分方程式の観点からみることができるようになっている。

このことは、高等学校程度における解析学の目標をどこに置くかという問題に通じる。日本の学習指導要領では、微分による極値追求、積分による求積を目標にしているように見えるが、自然界、社会に生起する量の変化の解析を目標にすることが大切ではないか、というのが渡邊氏の主張であり、共感を覚える。

また、氏は、量の変化の解析として「相対変化率が一定の変化」として指数関数をとらえる優れた実践が、氏家英夫氏により数教協高校サークル・ブックレット２「量の解析に基づく指数関数・対数関数の指導」にまとめられていることを紹介している。こうしてみると、氏家氏の仕事は、解析学の目標をどこにおくかということに明快に解答を提示しているものと見ることができる。今後、この方向で、微分方程式への自然な移行がプラン化されるのが楽しみである。

４　ヲルキカ～紙を折る幾何学～

市立大通り高校では２０１１年度から選択科目として新しく「数楽工房」を開設する準備に入っている。その目的は数学的活動を通して数学の有用性を知り、現象を数理的に考察する能力を養い積極的に活用する態度を育成するというものである。

扱う内容は、カクシリキ（角度測定器）、音楽と数学（笛の科学）、猫写し（一次変換の視覚化）など多様である。分科会ではその企画を中心になってまとめた、清水貞人氏と立花悠氏が紙を折ることによって図形を扱う単元の構想について報告している。

この単元は、「ヲルキカ」と命名されている。その内容は、次のようなものである。紙に描かれた円の内部に1点を固定し、円周上の多数の点を固定した1点に重ねるように折り線をつけていくと、折り線全体の中に楕円が浮かび上がる。その1点を円の外部に固定すると、今度は双曲線ができる。円の代わりに直線を使うと、放物線ができあがる。すべての2次曲線を紙1枚を折ることによって実現する。さらに、三角形の5心を紙を折ることによって見つけようというものだ。

分科会では、実際に紙を用意して、２次曲線を折りだし

てみたが、なかなか感動的である。自分の手で折りだしたものなので多少いびつでも愛着がわく。数学的活動の中にも多様な活動が想定されるが、このように、実際に手を動かす活動もなかなか良いものである。

分科会では、楕円を折るときの固定点と円の中心がこの楕円の焦点であり、円の中心の方の焦点をどんどん遠ざけていき、無限遠点まで遠ざけると円は直線になり楕円だった曲線は放物線になり、さらにこの点が無限遠から反対側へまわって楕円の弧と一緒に有限のところへ戻ってくると放物線は双曲線になる、このように、楕円は、輪ゴムのように無限遠でつながっているイメージを持つ世界である射影幾何学にも触れるとおもしろいのではないかなどと議論された。

このような内容で展開される「数楽工房」がこれからの社会をになう市民である高校生に、数学の夢や楽しさを伝える数学カリキュラムとして定着することを期待したいものである。

5　算数や中学数学の教材の活用

菊地剛氏も高校3年生の数学があまり得意でない生徒たちに、なんとか楽しみながら計算練習をさせることができないものかと、いろいろ工夫してきた実践を紹介してくれた。その方法は多彩である。例えば、自然数2, 3, 4, 5, …を連続する整数の和で表す方法を考える。2は不可能で、3=1+2、4がまた不可能で、5＝2+3, 6＝1+2+3, 7=3+4となるが、8が不可能で、と続く。2^nになると表すことができないが、その他は必ず連続した整数の和に表すことができる。これだけで、結構楽しむことができるが、2^nがどうして表すことができないのかについて疑問が残り、どうしても考えたくなる。このときに、行われる試行錯誤による計算量は結構なものになるというわけである。

その他にも、3桁または4桁の整数によるカプレカー操作の繰り返しで必ず同一のカプレカー定数に達することを確認する問題もある。さらに、「17番目の数の不思議」の性質を使って、高校生らしく、１５０ます計算と称して、10列17行の枠を与え、一番上の行には0から9までの数を順に記入し、2行目はすべて同じ数とする。1行目と2行目の数の和を計算し1の位のみを3行目に記入するこの作業を17行目までくり返すと17行目がすべて同じ数になることを確認する。などという方法も行っている。

また、整数の計算による遊びを紹介した英文を提示しながら、153などの数には$1^3+5^3+3^3=153$であることこのような性質を持つ数が他に、370, 371, 407があることを紹介している。さらに、352にこの操作を3回行うとまた352に戻

ることなどを紹介していて、本当にそうなるのかどうか確かめたくなるあたりがなかなかうまく計算されている。

計算の練習というと、とかく無味乾燥なドリルを一定時間内にどのくらいできるかを競わせるような、難行苦行を連想させるが、氏の実践は学習者が自発的にやってみたくなるような仕掛けを用意することから始まっており、学びのあり方の本来の姿がある。同時に、単なる計算練習にとどまらず、数学の楽しさ、おもしろさ、奥深さを知らせる実践である。

整数論は、ほぼ四則演算だけで数の構造の不思議さを提示することができ、小学生からその問題の意味を理解できると同時に、ガウスをして数学の女王と言わしめたほど、奥が深く、その解決にはあらゆる分野の数学が係わり、その背後に数学自体の調和の姿さえ垣間見えるほどに美しいものである。ぜひ、計算練習にとどまらず、次の世代の人達にその美しさ不思議さを伝えたいものである。

6　余弦定理の指導

余弦定理の指導法の新たな提起は筆者によるものである。

最近は、高校で本当に数学の授業が行われているのか心配になることがある。数学の授業と称して、予備校の授業が行われているのではないかと疑いたくなる場面を見かけることが多くなっている。目的が、数学という学問のおもしろさや、有用性を知るためのものではなく、数学の試験でよい点数をとることによって自分という個人の社会的地位の上昇をさせるためのものになってきているのではないかと疑われる。

このことは、授業の方法にも現れている。数学の有用な定理を指導する際、その定理がなぜ成立するのかという、真理を表した定理自身に関心を持つのではなく、その定理を使って試験に出る問題をどのように要領よく解くかということを中心に指導する授業方法が横行している。

三角比の学習で、正弦定理、余弦定理などを指導する場合も同様で、定理の証明には見向きもせず、定理を使った問題解法の指導のみをするということをよく耳にする。

もちろん、これは、教師の価値観が歪められているという問題のみに由来するものではなく、学習者である生徒も、歪められた評価の中で育ってきた生育歴から、真理探究に対する姿勢はほとんど感じられないものもいる。ひどい場合は、それは、テストにでるのかどうかということのみを重要性の判断基準として学習している場合も見かけられる。

しかし、このような状況下にあっても、数学は、それが持っている本質から、そのおもしろさ、興味深さによって人を虜にしないではおかない魅力にあふれているものであ

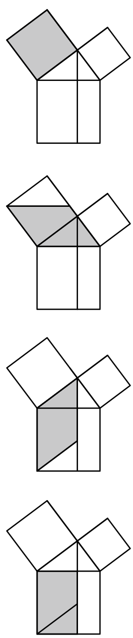
る。

　今回は、余弦定理を取り上げ、この定理が持っている本質を明らかにし、「意味」を伝えることによって数学の魅力を伝えようと試みた。

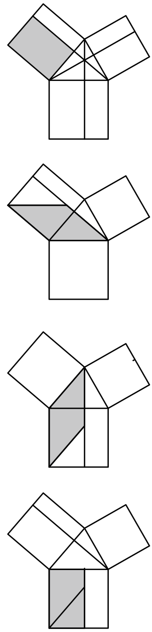
　ところで、ピタゴラスの定理が拡張されたものが余弦定理であることは、その式の類似性に着目するとわかる。しかし、真理として眼前に見えてくる定理の証明過程について、ピタゴラスの定理の証明方法の単純な拡張によって、余弦定理が出現する様子はいままで十分な方法が開発されていなかった。この単純な拡張による証明を、アニメーションによる平行四辺形の等積変形と回転で理解してもらおうと企画したものだ。

　ピタゴラスの定理の証明は、次のように行われるものを利用する。直角三角形において、直角を挟む２辺b、cの上に正方形を作りこの面積に着目すると、この面積の合計がb^2+c^{2}ある。この面積の合計が斜辺aの上に作った正方形の面積a^2に等しいというのがピタゴラスの定理であるから、これらの面積が等しいことを示せばよいことになる。

　よく知られた方法であるが、左上の正方形の面積を辺に沿って平行四辺形に等積変換して行き、平行四辺形の一辺が三角形の斜辺に重なったところで、ストップし、三角形の左下の頂点を中心に回転して行く。平行四辺形が真下を向くまで回転する。次はこの垂直線の向きに等積変換して行くと斜辺の上にできた正方形の一部を占めることになる。この操作を、右上の正方形についても行うと、２つの小さい正方形が、ぴったりと大きい正方形に重なることが見て取れる。これで、ピタゴラスの定理、b^2+c^2= a^2を示すことができた。



　直角とは限らない三角形ABCにおいて、３辺a、b、cの上に正方形を作りこの面積に着目する。三角形ABCに各頂点から対辺に垂線をおろす。さらに、その垂線を延長し、各正方形を二つの長方形に分割する。左上の正方形の中にある下側の長方形について、ピタゴラスの定理の証明と同様の操作をすると、下の正方形の一部に重なる。この操作を、右上の正方形の中にある下側の長方形についても行うと、これら２つでぴったりとa^2の面積に重なることが見て取れる。



いま、注目したb^2とc^2の一部の長方形の面積の反対側の長方形の面積はともに$bc\cos A$であることがわかるので、

$$a^2=(b^2-bc\cos A)+(c^2-bc\cos A)$$

すなわち、

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

である。というものである。まったく同一の操作で、ピタゴラスの定理と余弦定理が証明されるのである。

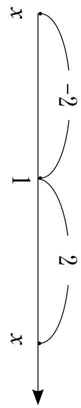
すると、$a^2=b^2+c^2$が直角三角形以外の三角形に拡張されて、余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ができたことが自然に理解できることになる。

7 絶対値の指導

今年度初任の及川剛志氏は、数学がなかなか獲得できない生徒の現実を見て苦しんでいる。氏がこれまでの実践過程で、理解を得ることが最も難しかったと感じたものの一つが絶対値の指導だったのではないだろうか。今回は、絶対値の指導について報告してくれた。いろいろ工夫した結果、40人のクラスで絶対値の不等式の扱いまで「この生徒は理解したな！」と思える生徒は1～2割程度だと思われると報告している。

その方法は次のようなものである。

$|x-1|=2$は数直線上のxと1の距離が2であることを表している。1から正の方向と負の方向へ2だけ離れた二つのxがあるので、



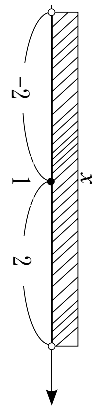
この二つのxはそれぞれいくつになるか確認する。

$$\begin{cases} x=1+2=3 \\ x=1-2=-1 \end{cases}$$

となることがわかる。

不等式についてもこれと同様である。

$|x-1|<2$は数直線上のxと1の距離が2未満であることを表しているので、1から正の方向と負の方向へ2だけ離れた2つの位置の間にxがあるので、その部分を斜線で表すと次のような図になる。



したがって、xは$-1<x<3$と表すことができる、としている。またこれとあわせて、$x-1$をXで置き換える方法も示している。大変優れた方法をとっていると考えられる。

絶対値の指導については、高校の教員であれば必ず苦しい思いをしたことがあることなので、分科会での議論も活発なものであった。

1. 絶対値の前に不等式を十分理解すべきだ。
2. 中学校では不等号は扱うが不等式は扱わない。数の大小関係と、不等式のように文字、あるいは不定元が入っているものとの間には大きなギャップがある。その間を丁寧に指導しなければ理解は難しい。
3. 数直線自身に拒否感がある。これを緩和する方法を考えなくてはいけない。
4. 定義を明確にしなければ理解されない。$|a-b|$をaとbの距離と定義し、$|x|$は$|x-0|$の退化形と考える。この点をしっかりととらえることが必要である。
5. $|-3|=3$の理解を、マイナスをとるというような指導をすると、後に文字が入った段階で、$|-a|=a$のような混乱が起こる。

などである。

いずれにしても、実数を学ぶときに、なぜ絶対値が出てくるのかという基本的認識に立った指導が必要だと考える。実数の特徴はそこに大小関係が入り、さらに、距離が入っていることである。この距離を認識し、扱うための記号が絶対値である。だから、二点間の距離が最初の定義になる。指導していく段階で距離を測る一点を固定化して0との距離にのみ注目したものが、教科書に見られる、

$$|x|=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

の記述である。

すべてをこの形に基準化しなければ絶対値が理解できないような認識は作るべきではないだろう。

$|x-a|<\delta$を理解するのに、

xがaより大きいときは$x-a<\delta$なので$x<a+\delta$

xがaより小さいときは$-(x-a)<\delta$なので、$(x-a)>-\delta$

より$x>a-\delta$

したがって、$a-\delta<x<a+\delta$と考えるようでは、手間がかかってしかたがない。

ここは、xはaとの距離がδより小、すなわち、xはaを中心とする半径δの円の内部にある、と考えて、数直線上では、$a-\delta<x<a+\delta$となることが理解できることが大切である。

やはり、絶対値の指導においては距離が理解できるようにすることが大切なのではないだろうか。

8 因数分解と数論

真鍋氏はこのところ、因数分解と数論の間の関係について研究をしている。今回の報告の冒頭に、「最高次が1である整数係数の方程式が有理数解を持てば、それは整数である。」ことを述べている。これは、一般には、ガウスの定理として知られる、整数係数の多項式が整数の範囲で既約ならば有理数の範囲で既約である。(対偶として、有理数の範囲で因数分解されるならば整数の範囲で因数分解される。）という事実の一部であることを氏は注意しているが、右の形で述べられると、なぜ、最高次が1の方程式の根を代数的整数と呼ぶのかその理由が明確になり、鑑賞に値する定理である。また、$\sqrt{2}$が無理数であることを証明するのは、数学Aの論理の単元で背理法を指導するときの専売のように扱われているが。この定理によって、最高次の係数が1である方程式$x^2=2$が整数解を持たないことはすぐわかる。すると、この定理によって有理数解を持たないことになり、この方程式の解である$\sqrt{2}$は無理数であることがわかることを指摘しており、痛快である。

本題に入るが、多項式の因数分解の中にはその手法に独特なテクニックを弄するものがある。その筆頭ともいえるのがx^4+4である。一見、因数分解ができないようにも見えるが、$x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=\{(x^2+2)-2x\}\{(x^2+2)+2x\}=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$と因数分解される。

氏は、これを、数学を学ぶものを苦しめるだけのものかと感じていたときもあったという。しかし、さらに複素数に踏み込んで、代数的整数の範囲で因数分解すると$(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$となり、この根である数$1+i, 1-i, -1+i, -1-i$を複素数平面に表してみると、美しい対称性が表れる。しかも、係数4の4乗根である$\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$で縮小してやると、$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$は$x^4=1$の根すなわち1の べき根であることに気がつく。同様の方法で2次式の積に因数分解できる多項式として、多項式x^4+x^2+1, x^4-3x^2+1などがあり、これらの多項式についても、同様のことが起きている。

氏は、特に、x^4-3x^2+1について注目し、この多項式は、

$$x^4-3x^2+1=(x^4-2x^2+1)-x^2=(x^2-1)^2-x^2$$

$$=(x^2-x-1)(x^2+x-1)$$

$$=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

と因数分解され、その根に、黄金比 $\rho=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ が現れ、他の根は、$\frac{1}{\rho}, -\frac{1}{\rho}, -\rho$ であり、鑑賞に値すると述べている。

今後、この研究は、因数分解と代数的整数の関係を究める方向へとさらに発展することが期待される楽しみな分野である。

9 開放講座数学

浦河高校では、町との協力関係のもと、毎年、開放講座が町民向けに行われているという。そこで、鈴木邦彦氏は数学で講座を開くことを決意し実施した、その報告である。テーマは、三角比を選び、三角比がどのように実際に役立つものかを伝えるために、校舎の高さを三角比を使って実測したということである。

高校生ではなく、一般の人に数学を伝えようとするとき、一番苦労するのは、どんなテーマで講座を開くと、数学の持ち味が伝わるだろうか、どんな人が来るかわからないので、予備知識をあまり仮定せずに、数学のすばらしさを味わってもらうには何をどのような切り口で伝えたらよいだろうかということではないだろうか。いわば、カリキュラムの作成に悩むのである。

筆者は、高校の数学の教員たるもの、相手が高校生のときにも同様に、この部分で悩むことが大切だと考えている。それは、数学的対象の中から、自分にとって最も大切なテーマの一つを選びながら、いま相手にしようとしている聴衆に最も適した題材を、最も適した切り口で伝える作業であり、教える内容に責任を持ち、主体的に係わるための出発点であるからである。氏も、同様の苦しみの中から、三角比を選んだに違いないと考えている。

また、テーマの切り取り方がみごとである。

本カリキュラムでは、最初に垂直に注意が向くように、また、手触りを大切にするために垂直2等分線の作図から入っている。次に、水平線と斜面を与えた図に、二本の垂直線を作図させ、二つの直角三角形を作った後で、辺の長さを測定し、そのsinの比、$\frac{高さ}{斜辺}$ を計算し、三角形の大きさに寄らずsinの比は一定であることを確認している。これを、cos, tanについても同様に行っている。その後、三角比の知識についてまとめた後、カクシリキ(角知り器)[1]を作成し実際に校舎の高さを測定している。この測定結果は、本当の高さにぴったりで、参加者共々感激したとのことである。

ところで、今回の参加者は一人であったという。一人であっても、これだけ丁寧に力を入れて、準備し、実施する、このことはすばらしいことだと考える。数学に興味を持って、仕事が終わってから、駆けつける参加者である。大事にしなくてはいけないと思う。ここで、数学に触れることでいい思いをした参加者が、口コミで数学はいいものだと伝えてくれれば、数学は、特殊の人ではなく、普通の人の間に広がってゆく。大人になってから、成績を上げなければいけないという制約から解き放たれてする数学はいいものである、また純粋でもある。多くの人の趣味の中に数学が位置づけられることを期待したいし、今回の実践はその意味でもすばらしいものであると考える。

二　まとめに代えて

今年の分科会は、レポートの数が少なかった。特に、小学校と、中学校のレポートが少なかった。少し気になる点である。しかし、その質の高さは注目に値するものであったと感じる。

教育が受益者負担のサービスととらえられ、教育は、将来利潤を生むために得る地位に対する投資であると考えられるようになって久しい。しかしこのことは、教育が人を幸せにする一側面である経済的利潤にのみ注目することを結果として招いた。数学も、同様である。

教育において効果を測ることは重要な側面を持っていることは認めるとしよう。しかし、「効果」を「成績」と短絡的に理解し、それが、学ぶものの動機にまで影響を与え、成績を上げるため、受験に役立てるためなどが学ぶ動機の多くの部分を支えているように思われる。さらには、教える側の動機までもが「成績を上げるため」にとらわれがちになっているように思われる最近の状態は異常である。

しかし、教育が現在受けている大きな風圧の下で、本分科会に提出されたレポート群には、このような、ゆがみが影響している様子がみじんも見えないのである。すべてが、数学をどう伝えると、その本質が伝わるのかという本来の意味の数学教育研究の動機に根ざすものばかりであり、その結果が、学ぶものの深い感動を呼び起こしているものばかりである。今回のレポート群は、本分科会が課題としている、どうしたら、数学が楽しいと思えるのか、という課題にみごとに応えるものになっているのである。

1　簡易傾斜角測定器「カクシリキ」（角知り器）。これは、数教協の足立久美子氏が考案したもので、フロッピーディスクのケース、5円玉、糸、ストロー、セロテープ、90度分度器のコピーで作成する、簡便に仰角や俯角を測ることができる教具である。

まさに、このような研究の積み重ねが、教育現場に近いところで、自発的意志が尊重され、研究するものの自由、と時間が保障され、強制や、指示、と無縁なところで、学ぶものの笑顔を求めて行われることが大切である。数学教育の中で、数学が伝えられ発展していくようにこれからも、自由と尊厳を奪おうとするものとたたかいながら、工夫を積み重ねていきたいものである。