数学教育

子どもたちに寄り添いながら、科学としての数学を教える道を～決して、何かの関門をくぐるための数学上の技術を教えるのではなく

吉田陽一

一　各地からの実践報告

「学校説明会での授業」（北海道釧路東校等学校　及川剛志）は、ガウスの有名な伝説（少年時代に１～１００までの数の和をすみやかに計算した）を入学を志す中学生相手に、「紙コップを用いて１００段のピラミッドを作る」には、「一体何個の紙コップが必要」かと言う形で、実際に紙コップを積み上げさせながら最終的に等差数列の式として発見させたという報告であった。現場の息吹が強く伝わるとともに、筆者は数学上の概念をこのように、体を張って体得させる授業にとても好感を持つことを記しておきたいと思う。

「背理法と数学的帰納法の証明？」（札幌篠路高校　真鍋和弘）報告者は自らが考える帰納法の内容を淡々と述べた後、背理法と数学的帰納法の指導時期に触れる。そして、それは「高校3年次がふさわしいと思う」と指摘する。この問題については今後、多くの議論が寄せられることを期待したい。

「興味関心を引く授業実践の取り組み～期待値、微分の定義」（北海道長万部高等学校　杉山　真）は、大変意欲的なレポートであった。数学Aというクラスにおいて、このような教材に取り組んでいったことに敬意を表したい。そして、その実践の中で報告者自身が確率とその周辺分野および極限定理への不明さを自ら自覚し、その探求へと挑む姿勢に好感がもたれた。こういう場面でこそ、共同研究者という存在がその意味を発揮すべきであったのだが、充分にその力を発揮できなかったことに自責の念をおぼえる。

「漢字の中にひそむ数字」(朝鮮高級学校　朴　大宇)は、長寿を祝う漢語に使われている漢字の中にその年齢を示す漢数字を見つけたり、一見、26項式に見える方程式の解が、０になることを見破らせたり、４元の連立方程式から４つの未知数の和を求めさせたり、地表円周よりその直径が２m長い円周の長さを求めよと言いながら、$2\pi r$ を用いて簡単に求められることを発見させたり、トーナメント戦の試

合数が実は、チーム数から導かれることに気づかせたり、複数の乗法の和が、携帯電話の文字盤を用いた置換により英単語になることを捉えさせるといった、生徒に柔軟な思考を育てゆこうとする実践の宝庫であった。

「算数の授業で考えるユニバーサルデザイン」（せたな町立久遠小学校　大口　加代子）は、「特別支援教育」の視点を持って取り組んだ実践の報告である。この文科省主導による特別支援教育というのは、「支援を要する子」と判定する第1段階が全て、担任教諭に任されてしまっていることからして大変注意を要するものであり、それ以降に於いても様々な問題を抱えている（筆者自身が、かつて札幌市に於ける「学びの支援コーディネーター」に任じられ、その研修を受けたからである）が、そうした状況の中でも報告者は、民間教育運動の成果に添って（このあたりは既に、教科書にも取り入れられているが）、液量の測定についての授業を行ったことが述べられた。協議の時間が制約されて充分にお聞きできなかったが、間接比較の段階から個別単位の導入へ至る過程をもう少し詳しく教えていただきたかったと思う。

「算数の基礎学力をつけるために～『割合』を理解させるための館小プラン～」（八雲町立熊石相沼小学校　市来健）は、5学年の児童が「割合」を理解できるようにするために2学年から5学年までを見通して、学校全体で力を合わせ、「割合に」関する教材を研究、実践したという報告であった。学校ぐるみで、熱心に力を合わせて研究に打ち込む姿が想像できる報告であった。

「学力という名のもとに」（雨竜町立雨竜中学校　大竹宏周）は、北海道教育委員会が全国学力・学習状況調査の成績を「改善」するために、そこで言う「学力」の内容、定義に何ら触れることなく様々な行政上の強制力を押しつけている実態を告発するものであった。そして、報告者は昨年度「『巡回指導教員』なるミニ指導主事とでも呼ぶべき職種につけられ、小・中の現場を回りながら、現場の教師たちが北海道教育委員会の示す「改善」の方向に添った様々な事業に追われ、「教師の自由な発想や教材を研究するための時間を奪」われている状況を見て、その実態を赤裸々に綴った報告であった。

「水そうの達人」(釧路町立阿寒中学校　山田　美彦)は、中学校に於ける比例教材の内容を、水そう(図)や対応表、小学校での掛け割り図を発展させた図、座標とグラフなどを用いて丁寧に行った実践の報告であった。その中で、初期値0、変域、倍々関係、増分一定、比例定数などの概念に丁寧に触れている。しかし、教科書（学習指導要領）の内容に規定されたためであろうが、この後、比例に続いて

「反比例（逆比例）」という陰関数を扱っていることには、大いに疑問を抱かざるを得ない。陽関数ですら、まだ1次関数にも至っておらず、ましてや2次関数など全く理解していない生徒相手に、陰関数を教える必要性は全くないと、筆者は考える。

「漸化式と分点の位置ベクトルについて」（北海道旭川西高校　佐々木　和生）は、漸化式から位置ベクトルを求めるまで計算力の辣腕をふるい、式の展開をしていく実践の報告であった。しかし、式を展開していく際にも、式表示だけに頼ることなく。教科書には出ていなくとも具体的に表を作ったり、図形表示によって「一種の公式」を捉えさせたり、分点の位置ベクトルについも作図によって表現されたものから直接、解を得ることを通しこれを一般化、定式化していくという形で随所に工夫が込められたものであった。

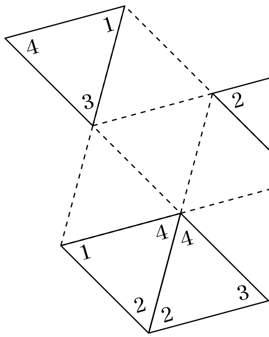
「代数方程式の解の公式は対称性を破壊して得られる　2次方程式、3次方程式を例にして」（北海道函館工業高等学校　黒田　正弘）は、代数方程式の解の公式についてまず、2次方程式の解の公式について触れ、そこに於ける2つの解 $t1$ および $t2$ について $t1+t2=-p$、$t1\times t2=q$ の2つの式を「対象で不変な式」とし、それぞれの式の前後の項を入れ替えても、その値に変わりはないからそのような式を「対称式」とする。次に、最初の和を求める式を減法に変え、それを「交代式」という。この減法の2乗の式を設定し、その対称性を破壊する即ち「交代式」を求めることにより、解の公式が得られるとする。報告者は、3次方程式に於いても同様の趣旨を述べている。これは、まさに一見に値する報告であり、是非多くの人々によって参照していただき、多様なご意見を寄せていただきたいと思わせる実践であった。

「仏国高校教科書にみる複素数」（名寄短期大学　渡邊勝）は、「センターテストに替わる『良い試験』を求める」という壮大な目標に向けて、この数年継続して研究してきた成果の最新版である。今回は、「日本で言う高3理系用教科書」から複素数の部分を中心とし、その関連分野も含めた翻訳と留意すべき事項についての指摘であった。その中で報告者は、前述の教科書の中で複素数について記述された部分が、1、複素数—表式、2、C（複素数の集合空間に於ける演算、3、実係数2次方程式、4、絶対値と偏角、5、複素数と幾何と構成されていることを述べ、日本の新指導要領との相違に留意することを促している。また、フランスのバカロレアが、「『ひねった』問題、『複雑な』問題よりは、基本の概念をきっちり問う問題が出されている」こと、「定理の論証に重きを置いているよう」であり、

「殆どが記述方式である」ことを指摘している。全体を通して原著に忠実であり、丁寧な翻訳である。是非、多くの方々に参照していただき、ご意見を寄せていただきたいと思う。なお、北海道教育委員会は全国学力・学習状況調査の成績を「改善」するための研修などしておらず、このような内容の研修を自ら行うべきではないであろうか？

「サイペタⅢと確率についてのメモ５（北海道札幌西陵高校　松本　弘文）は、統計学上の大数法則を（体育会的根性？）で証明しようとした報告である。先にも述べたように、筆者はこういう実践が大好きである。報告者は、「サイペタ」と呼ぶ正４面体を作成し、それを一定回数振って大数の法則が成り立つことを確かめようとする。そのために、一般に、大学の数理統計の教科書では $p(|X\text{-}m| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$ と表されるチェビシェフの不等式を $p(|X\text{-}m| \leqq k\sigma) \geqq 1-\frac{1}{k^2}$ と変形し、そこから更に $p\left(\left|\frac{x}{n}-p\right| \leqq \varepsilon\right) \geqq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ へと変形する。

これを使い、「サイペタ」の1の目が出る相対度数 $\frac{X}{n}$ が確率 $p=\frac{1}{4}$ と０・02以上離れない確率をだいたい０・９とし、その試行回数を約４７００回とする。こうして実行したところ糊代の部分が不均等であったため各目の出方に偏りが出てしまったと言う。そこで糊代部分を以下のように改良した「サイペタ」を作成し、５００個の「サイペタ」



を各10回、N=5000として、実行しようとする報告であった。ぜひ、その結果を知りたいものである。付随する資料『確率』についてのメモその５」に於いて報告者は偶然と必然の連関について弁証法をもとに述べているが、筆者も同感である。「偶然性は弁証法的思考においては、胚の発展（発生）においてと同様に、必然性のうちに集約されているのであ」（フリードリヒ・エンゲルス著「自然の弁証法…大月書店版マルクス　エンゲルス全集20巻４９１原ページ、傍点は、ママ）り、「偶然性もまた客観的に存在しているのであり、必然性は、それのみでは存在せず、つね

に多くの偶然性にまといつかれているのである」（寺沢恒信著「弁証法的論理学私論」111ページ）。だから、今後の試行に於いては、接着面のずれだとか、接着面に於ける糊の不均等さ等といった偶然性のために、大数の法則にたどり着けないことも予想される。また、言わずもがなであるが、いくらサンプル数が大きかろうと不動の大きさと性質を持つ集団として客観的に存在するものを測量する大量観察と多数の測量結果を集団観察して「安定的結果」とおぼしきものを見つけ出そうとする大数観察の区別についてもきちんと触れておくべきであろう。

「本校の学校設定科目『数楽工房』の紹介」（札幌市立大通高等学校　平岩　恒逸）は、「不登校経験者や中には発達障害など何らかの困難を抱える生徒もいる」「定時制・単位制・3部制の普通科高校」に於ける実践の報告である。このような教育現場に於いて開校四年目の昨年度から、『数学が日常生活にどのように役立っているか』や、「数学を楽しもう！」というコンセプトの下、教科書は一切使わず、数学科教員が作成したプリント、教材教具を用いて」昨年度の四月より九月いっぱいまでに行った「数楽工房」の26の教材の中から「一刀切り」と「ハノイの塔」についての実践が報告された。「一刀切り」については中学校などでの実践も多数報告されているし、「ハノイの塔」もポピュラーな実践である。しかし、これらを先に記した生徒たちとその環境で実践することが、彼らにどれほどの驚きと満足感を与えるかは、想像に難くない。報告者自身が述べているように、教科書のないこのような授業こそ「まさに教える教員の腕の見せ所」であろう。そして、このようにして生徒の息づかいを聞きながら、それに併せて彼らの力を借りつつひとつの数学を作っていくことが、真の数学教育なのではないだろうか。

今後の「数楽工房」の発展が楽しみである。

二　小学校の比例について

以上、各地から様々なレポートが寄せられたが、その中に小学校の「比例」教材について触れたものがなかったのは、大変残念であった。現行の教育課程では学習指導要領の中で〔第五学年〕の目標に「⑷…、数量の関係を式で表したり、式を読んだり、その関係を調べたりすることができるようにする。」と記され、「2　内容」の「D　数量関係⑷で、「二つの数量の対応や変わり方に着目する」と、述べられている。

これを受けて例えば、札幌市小学校教育課程編成の手引きでは、「5年　2⑵第五学年の観点別評価規準〈算数へ

の関心・意欲・態度〉Ｄ　数量関係」に於いて、「・伴って変わる二つの数量の変わり方に関心をもち、特徴を見いだそうとしている。比例の関係に着目して問題を解決しようとしている。」と述べられ、「関連単元」として「12・百分率とグラフ」と記されている。

ところが、札幌市で使われている東京書籍株式会社による５学年の教科書では、その上巻の単元「直方体や立方体の体積」20ページ「高さと体積の関係」に於いて突然、（高さを）２倍、３倍、…にすると、（体積）も２倍、３倍、…と変わるとした上で、「二つの数量□と○があって、□が２倍、３倍、…になると、それにともなって○も２倍、３倍、…になるとき、『○は□に比例する』といいます」と、比例の定義らしきものが記されている。そして、下巻の単元「四角形と三角形の面積」46ページに於いても、平行四辺形の面積について、高さが２倍、３倍、…になると、面積は２倍、３倍、…となることに触れ、「三角形の底辺はそのままで、高さを変えるとき、面積は高さに比例しますか。」と、問いかけている。

これらの記述には、学習指導要領、札幌市小学校教育課程編成の手引き、東書版教科書を通じて、その観点に一貫性がみられないことが特徴である。

そして第六学年になると、学習指導要領では「１　目標⑷比や比例の意味について理解し、数量の関係の考察に関数の考えを用いることができるようにする。」（傍点、筆者）と比を先行させる形で記され、「２　内容　Ｄ　数量関係⑵…。ア　比例の意味について理解すること。また、簡単な場合について、表やグラフを用いてその特徴を調べること。」と、述べられている。

さらに、前述の手引きには、６年　２⑵第６学年の観点別評価規準〈算数への関心・意欲・態度〉Ｄ　数量関係」に於いて、「・身の回りの伴って変わる二つの数量の中から比例の関係にあるものを見つけようとしている。　・比例の関係に着目すると効率よく処理できるというよさに気付き、比例の関係を進んで生活や学習に活用しようとしている。　・簡潔に表すことができるなど、a、x などの文字を用いて、式に表すことができる。」と述べられている。

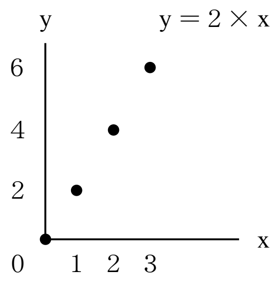
そして、東書版教科書６年の「比例と反比例」という単元では、対応表と倍々関係のみで、比例定数と比例の式、グラフ、比例問題の解法までを扱っている。しかも、この単元に至るまでに、「比例する」という言葉が、５学年からずっといろいろな単元で飛び出している。

このように現行の教育課程に於ける「比例」の扱いは、大変不適切であり、その内容は甚だしく不十分で、非科学的なものである。例えば、正比例関数は連続関数であるが、

対応表だけでは、それが表せない。対応表で用いられる数値は、通常、整数値であるから、対応表に於いては、その間に存在する小数値も分数値も無理数値も表せない。「初期値0」も表せない。正比例関数として大切な「同時、連続、一様変化」といったことが何も表されていない。これでは、関数を定義したことにはならない。つまり、量についての解析がなされていないのである。だから指導要領が、「数量の関係の考察に関数の考えを用いる」と言っても、「関数の考え」（傍点、筆者）がないのだから、無理なのである。

もちろん、小学校の児童が無理数の領域を認識できるわけはない。しかし、それを量の変化として連続的にとらえることは可能である。そのための教具として、連通管水槽が作られ、対応する変化であっても正比例ではないものを認識する教具としてブラックボックスが活用されてきたのである。

しかしそれとは異なる、官制の教育課程に沿ってゆくなら、そうした数学上の内容とは全く無縁なものとならざるを得ない。官制の教育課程には、量の変化を捉える視点が欠けているから、二つの数量の変化を解析することが行われないため、それらの連続変化を示すことができず、そのため一様変化を示すこともできない。しかも、「初期値0」については東書の教科書を見ると、比例の「グラフは0を通ります」と記されているだけである。すると、「比例のグラフ」を書けといっても、



といったグラフになってしまう。

また、前述の手引きによれば、「比、比例、平均の性質などに着目して数量の関係を考察処理したり」（算数　6年　(2)第6学年の観点別評価規準〈算数への関心・意欲・態度〉D　数量関係　盛り込むべき事項）とあるが、考察するのは関連する二つの量の変化のしかたであって、関係ではない。「関係」ということになると、量的変化ではなく、個々の時点に於ける単なる相互の大きさ比べ＝割合＝等しい比ということになってしまう。

さらに、現行の教育課程の組み方が、甚だ非科学的なものであるから、先に見たように、指導要領では5学年の百分率の中で比例を扱えと言うし、先の手引きでも割合―比―比例―平均と進めという。しかもそれらが、あちこちに

散在している。これでは、子供たちの思考が混乱するのは、当たり前である。そして子供たちが、比例問題を解くにあたっては、正比例関数の考え方が使えず、単なる「倍々関係」＝「比」＝「割合」を用いて行うことしかできなくなっている。そのため、関数の内容を規定するものとしての比例定数と単なる比の値が子供たちの中では、判然としないまま混在することになる。それは、正比例に於ける連続変化の概念が欠如しているからに他ならない。

三　問題の根源

　こうした問題が生ずるのは、官制の教育課程が未だに、古い「割合」—「比」—「比例」という順序で組み立てられているからである。そして、「比」とは「割合」に他ならない。それに対して民間教育運動の中では既に一九五八年に単位あたり量（「単位量あたりの大きさ」ではない）の概念が登場し、その後、平均—内包量（単位あたり量）—比例—倍—分布—比という指導順序を確立してきたのであるが、こうした実践の深化について来られない人たちが作った教育課程を、現場に押しつけるため、多くの子どもたちが辛い目にあっているのである。しかも、この教材が２つの学年に分断され、その定義も内容もスカスカというのは、大変困った問題である。

　そうした人たちが、平均の学習を後回しにするということは、量の世界で言えば、内包量が成り立つ物理的背景を削除し、関数の世界で言えば、正比例関数が成り立つ物理的背景についての知識を欠落させることを意味する。そのうえで、「比例」に対して「比」を先行させるということは、具体的な物理量に於ける大・小との結びつきを否定するということである。そのうえ、「百分率とグラフ」の中で「比例」を扱うというのは、筆者にすれば誤記であると思うのだが、それにしても、その本音が透けて見える。つまり、「割合」の考え方で「比例」という教材の内容を構成しようとしているのである。

四　「割合」とは、なにか？

　一般に、「割合」とは、複数の量の間に於ける比である。即ち大きさ比べである。だから、具体的な物理量ではない。この点に関して銀林　浩氏は、その著「量の世界　構造主義的分析」１１８ページ以降の中で、濃度を拡大し、歩合や百分率まで内包量の仲間としているが、筆者はこの見解に与しない。なぜなら、歩合や百分率と言った割合は、先に述べたように具体的な物理量ではないからである。そし

てこれまでの数学教育の改革の内容は、具体的な物理量をその土台に置き、それを数値化することによって形作られる数学の世界を目指してきたからである。

それでは、「割合」はどのように扱えばよいのであろうか？その内容は２つに分けられる。

一つは、部分と全体の大きさ比べである。例えば、家計費に於ける水道光熱費の割合と言ったようなものである。この場合は、水道光熱費が部分の量を構成し、家計費が全体の量を構成する。そして、部分÷全体＝割合　が得られる。この割合は、割合分数に始まり、割合小数（～の１―３とか、～の０・45といった形）、歩合（割合小数の１桁ごとに名前をつけたもの即ち０・７３９２→７割３分９厘２毛）、百分率（割合小数を百倍して表したものの０・56→56％）、千分率（０・７３９→７３９‰《パーミル》）として、表現される。

これらはいずれも、独立してはいても、一方が他方の部分を構成している２量の間の比であって、具体的な物理量ではない。また連比に於いては、二つ以上の独立した複数の量の間に於ける比となる。

二つは、同様に独立した二つの量の間の大きさ比べであるが、両者が完全に独立している場合である。例えば、複数年度間に於ける経済実績の対比である経済成長率とか、乗車定員の数に対する乗客数の比といったものがある。こういう場合は、２量が完全に独立しているので、部分と全体の関係にならない。そうではなく、対比する量÷規準量＝割合　となる。そしてその表現形態は、前記と同じであるが、両者が完全に独立している（部分となる量が無い）ため、その比が１を超えてしまう（％で言えば、１００％を超えてしまう場合）が頻繁に生ずる。

この点については、対比する２量の関係が部分と全体という従属関係にあるのか、完全に独立した関係にあるのかを見極める必要があることを子どもたちに指導すればよい。大人向けの表現で言えば、日米安保条約下の日本か、日米安保条約を破棄し自主、独立の国家となった日本かの違いである。脱線してしまった。

いずれにしろ、「割合」というものを扱う前に、量についての深い認識を子どもたちの中に育てることが大切であろう。そして、「割合」の扱いは、５学年の「百分率とグラフ」（東書）で一気に扱い、それ以前の学年でもそれ以降の学年でも、触れるべきではないと考える。

五　終わりにかえて

小学校に於ける算数の重要な内容である「比例」が抱え

るこうした点に目を向けながら、全道各地で実践が積み重ねられ、次回の分科会にこの問題を含む多数の実践報告が寄せられることを期待して、この稿を終える。