

本質にせまる数学教育の研究をめざして

真鍋和弘

一 はじめに

強い国家意識に囚われた安倍政権（第二次）のもと、「教育再生」を掲げた教育政策が実行されている。「戦後レジームからの脱却」を目指そうとする安倍首相は、「歴史認識の修正」や日中・日韓の「領土問題」を問題視する発言を続け、マスコミ（すべてではないが）も批判なしに報道するという状況が続いている。教育委員会を首長の管理の下におき、「日本史」の必修化や「道徳」を教科とすることが提案されている。その影響は、やがては科学や数学にも及んでくるものと思われる。〔注〕。

一方で、いま世界はグローバル経済（その正体は一部の超巨大金融資本）により、富める国と貧しい国とに分断され、とりわけ若い世代に矛盾の矛先が向かっている。数学は国家体制

や社会、組織から独立した学問であり、誰もが何処でも自由に学ぶことができる。しかしながら、グローバル経済を可能にしたコンピュータやインターネットは、もともと数学や物理から生まれた技術である。数学は社会を変える大きな力を持っている。筆者の経験でも、数学を学ぶことは世界を理解し本質を見きわめるためにたいへん役に立つ。その意味で本分科会がこれまで果たしてきた役割は非常に大きいと思う。

今年も多くの（二五名を越える）参加者を迎えて、分科会がスタートした。全員による自己紹介のあと、一三本のレポートが報告された。年々管理や統制が厳しくなる現状にあっても、創意と熱意にあふれるレポートを発表された参加者の皆さんに敬意と感謝を申し上げる。この報告をまとめるにあたり、成田收さん（共同研究者）の「合同教研全道集会報告」（道教協通信「こんぱす」No.267）を参考にさせていただいたことに深く感謝します。

〔注〕戦前の例として、西洋人の名前がついた「ピタゴラスの定理」を廃し、「三平方の定理」に変えたことなどが有名である。命名者は末綱如一（高木貞二門下で東大教授）だと
言われている。

二 分科会の討議から

1 「積分の導入」

清水大博（札幌あすかぜ高校）

数学Ⅱの積分を通常の微分の逆演算ではなく、曲線で囲まれた図形の面積を求める方法（区分積法）として導入しようという試みである。これから研究授業として行いたいのでアドバイスしてほしいという若い報告者の要請もあり、分科会が百家争鳴の様相となって面白かった。主な意見としては「なぜ面積を求めたいのか、その動機が理解できないのではないか」「面積を細い長方形に分割するのは不自然で、円の面積の時のように三角形に分割する方が良いのではないか」「いやいや台形で近似すべきだ」「放物線（2次関数）の前に直線（1次関数）で囲まれた部分の面積から始めるべきだ」「細かい数値計算はみんなで手分けして行う方がよい」などなど、かえって報告者を惑わすような盛り上がりとなってしまったが、積分の導入では、皆がいろいろと苦労していることが確認でき参考になった。

2 「伝え合いを授業にどう取り入れていくか」

大西 洋（札幌大通高校）

数学の授業で「伝え合い」を取り入れた実践報告である。

今回は三角比の中から（例えば正弦定理が成り立つ理由は？など）8つのテーマを設定し、3人から5人の班の中で議論して解決し、代表が黒板の前で発表するというものである。その際、（一〇〇円ショップで購入した）小さなホワイトボードが大きな力を発揮する。通常の授業では口頭による発表が難しい部分があるが、報告者によれば「主体的に課題に取り組む姿勢が多くの生徒に見られた」ということである。新しい学習指導要領には「言語活動の充実」が挙げられているが、そもそも「数学」そのものが「数学言語による活動」なのであり、別に指摘されるまでもないことである。生徒たちが楽しくのびのびと意見を「伝え合う」ことが数学を理解するうえで非常に大切であることが改めて実感された。

3 「数学A・整数の性質これでもいいのか」

佐藤理河（鷹栖高校）

新指導要領により高校数学に初めて登場した「整数の性質」の授業の報告である。今回は整数に関する題材として、「倍数と約数」「最大公約数と最小公倍数」「ユークリッド互除法」「1次不定方程式」「循環小数と分数」「2進法」などの授業プリントが紹介された。どれも整数（実際には自然数）の計算だけでできてしまうので、生徒たちの反応も良かったようである。報

告者も「予想以上に面倒くさがらずに答えを見つけ出していたので、感動した」述べている。「整数の性質」の本当の面白さは、すぐに答えが出るのではなく、その背後に未知の広大な数学的世界（ガウスによって発見された整数論）が広がっていることである。その存在を生徒にどう気づかせていくかが、これからの研究テーマとなるだろう。「もつと楽しく、もつとわくわくする整数の授業はないのか？」という報告者の問いに答えられる授業プランを期待したい。

4 「仏国高校教科書に見る幾何」

渡邊 勝（名寄市立大学非常勤講師）

長くフランスの教育内容の研究が続けられている渡邊さんの今回の報告は、高校の幾何学教育についてである。日本では中学校で合同や相似をユークリッド流に習うが、今回紹介されたフランスの高校教科書では、複素平面上の図形の変換を、複素数の演算による変換として扱っており、たいへん高級である。しかも静的ではなく、動的な変換として扱っていることも特徴である。教科書には興味を惹きつける冒頭問題が載せられている。それは、「三つの都市を一つの点Pから直線で結ぶとき、三本の直線道路の長さの和が最小となるのは、点Pをどこにすればよいか？」という問題である。歴史的にはこの点はシユタ

イナー点と呼ばれており、フェルマーがトリチェリに投げかけた問題として有名である（この教科書ではトリチェリ点と呼ばれる）。この教科書をきちんと学べば、最後に解き方が分かるようになっており、なかなかしゃれている。渡邊さんには、日本の高校生のためにぜひ早く邦訳を出版して欲しいと思う。

5 「統計の授業をやってみて」

菊地 剛（留萌高校）

新指導要領で新しく「データの分析」という名称で統計が導入された。その中で生のデータ（サッカーJ1の成績）を用いた実践が報告された。授業では、①得点と勝点の散布図、②年俸と勝点の散布図を作成し、相関があるかどうかを考察した。できあがった散布図をみると、①は多少の正の相関、②は相関がほとんどみられない、という結果が得られた。菊地さんは、「最近の生徒はおとなしく、よく言うことを聞くようになってきているが、悪意をもってデータを使う人がいるので、だまされないためにも統計の学習は必要だ」と強調されていた。インターネット社会を迎え、誤った情報でも簡単に信じてしまう風潮があることは問題である。大切なことは自分の頭で考えるということではないだろうか。

6 「数学通信つくってみました」

加川達仁（厚岸翔洋高校）

「A Correspondence of Mathematics」と題された数学通信を通して「いかにして数学を楽しんでもらうか、数学の有用性をいかに知ったもらうか」をめざすとりくみが紹介された。偶然だが、筆者も同校で数学を教えた経験（初任者として）があり、やはり数学通信を発行していた。このレポートは、数学教育と子どもたちに対する深い気持ちを感じられ、通信自身も、自分自身の言葉で書かれていて、読む者を数学の世界に引き込んでいく。とくに面白かったのは、ユークリッド幾何学の直線と半直線を取りあげた部分である。加川さんは「ドラゴンボールの『如意棒』って、直線なのかな？半直線なのかな？」という「ふとした疑問」が湧き、その漫画を発行した出版社に直接電話で確かめたというエピソードである。通信の最後に次のコメントが添えられている。「おそらく、こんなくだらないことで出版社にまで問合せをしようとする人は、そんなにいないでしょう。しかし私は、数学という教科において『どうして？』を大切にしたいと考えています。……。皆さん、何事も『どうして？』を大切にし、納得するまでチャレンジしてくださいね」

7 「比例・反比例の達人」

山田美彦（釧路市大楽毛中学校）

転勤して、以前勤務していた学校と生徒の実態が異なる学校での実践である。授業では以前使用したワークシートを改訂し、他のクラスと進度やテストの点数の差が少なくなるようにしている。各ワークシートには次のようなユニークなタイトルが付けられている。①関数の達人（グラフボックス）、②水そうの達人、③移動の達人、④変域の達人、⑤The座標、⑥グラフくらぶ（比例の1・2）、⑦反比例の達人（巻ノ一・二）、⑧グラフくらぶ（反比例）、⑨グラフくらぶ（グラフ式）、⑩天秤の達人、⑪歯車の達人。山田さんのワークシートを見ると、教科書だけを使用した授業では絶対伝わらない豊かなイメージが感じられる。議論の中で、比例や反比例を学ぶ場面では、天秤や歯車の例が有効であることなどが確認できた。

8 「やるべきことは何なのか」

大竹宏周（雨竜町雨竜中学校）

巡回指導員という立場にある報告者は、道教委によれば「学方向上に積極的に取り組もうとする学校を巡回し、ティーム・ティーチングによる授業や若手教員等の指導、授業作りに関わる支援を行う」活動を行っている。しかし、会議のたびに強調

されるのは「来年度の全国学力学習調査で全国平均以上を！」と言うことだそうである。このことが各学校や各教師たちにたいへんな圧力となっている。道教委は平成二五年度の結果発表のときのコメントで「これまでも繰り返して申し上げていますが、道教委は『平均点そのもの』を追求している訳ではありません。教育の機会均等という義務教育の趣旨を踏まえれば、本来、生まれ育ったところによつて学力に大きな差があつてはならず、すべての子どもたちに『社会で自立するために最低必要な学力』を保障しなければなりません」と述べている。そのためにもやるべきことは過去問の反復練習だけではないはずである。大竹さんが強調するように、本来行政がやるべき仕事は、手厚い教員配置や学校施設の充実など教育環境の整備を行うことではないだろうか。

9 「ベクトルの内積とは何か」

成田收（数学教育協議会）

このレポートは、長野の和田博さんの方法（二〇一三年数教協全国大会）をもとにした内積の導入についての提言である。その方針は、「ベクトルの内積とは正射影をとることである」という言葉に要約される。成田さんは、「ベクトル空間に距離、角度がすでに備わっているところに、急に内積を導入するこれ

までのやり方（多くの教科書で採用）では納得することができないのではないか。逆に、ベクトル空間には（初めに）長さや、角度の概念はなく、そこに内積が入るからこそ、長さや角度などが定義されるのではないかという思いが強かったので、（和田さんの方法は）私の感覚に近く、これを皆さんに紹介したい」と述べている。ここでは具体的な方法について触れることはできないが、内積の性質やベクトルの大きさ（長さ）、さらに三角関数の余弦定理や加法定理までも導くことができ、この方法が有効であることが紹介された。

10 「虚数 i について」

黒田正弘（八雲高校）

虚数 i に関する話題について、虚数の誕生に結びついた3次方程式のカルダーノの公式、虚数を使つての表現としてのオイラーの公式の導出、複素数の定義方法（4種）、複素関数論入門などについてまとめられたものである。さらに、複素数の応用としての電気工学、航空（流体）力学、量子力学など、広範囲な話題にも触れている。虚数が生まれた本当の理由は、3次方程式の根の公式（カルダーノの公式）において、実根は虚数を用いてはじめて表すことができるという数学的発見によるものである。後にガウスにより、「実数を係数とする n 次方程

式は n 個の複素数の根を必ずもつ」という代数学の基本定理に帰着された。オイラーの公式の導出については、微分方程式による方法（解の一意性を用いる）と、指数関数と三角関数のテイラー展開を使う方法を紹介している。複素数の定義については、①記号 i とその演算から導入する方法（教科書はすべてこの方法）、②実数を係数とする多項式環を極大イデアルで割って体をつくる方法（デデキントによる）、③実数のペアの集合に 4 則演算を定義する方法、④ i を行列で表現する方法の 4 種類を紹介している。この他に、航空力学のジェイコフスキー変換や量子力学のシュレディンガー方程式まであつかっており、話題が豊富で飽きさせない内容であった。

1.1 「3次方程式の解法と虚数の誕生」

「数学者小林昭七（一九三二—二〇一一）の伝言」

真鍋和弘（札幌英藍高校）

微分幾何の研究者として世界的に知られる小林昭七氏（カリフォルニア大学）が一昨年亡くなった。数学セミナーで特集が組まれたり、遺稿集として『顔をなくした数学者』（岩波書店）が出版されている。小林氏が高校生のために書いた『円の数学』（裳華房）の序文に、日本の高校の教科書には、虚数はすべての 2 次方程式が解けるために生まれたように書いてある

が、それは歴史的事実と異なり、実は 3 次方程式の根の公式に欠かすことができないものとして生まれ、認知されてきたことが述べられている。小林氏は他の著作においてもこの事実に触れており、このことを数学の文化として、とくに若い人たちに伝えることが大切だと考えていたようである。実はカルダーノの公式を詳しく調べてみると、不思議な現象が起こっていることに気づく。それは、3 次方程式が 3 実根をもつとき、必ず公式の中に負の数のルートすなわち虚数が現れることである（その逆も成立する）。当時の数学者たちは、虚数の存在を認めてカルダーノの公式をとるか、それとも（虚数の存在を認めず）カルダーノの公式を諦めるか、という二者択一を迫られたわけである。その後の数学史が証明するように、やがて虚数の有用性が確かめられるようになり、虚数の存在そのものも認められるようになってきたのである。高校生に初めて複素数を教えるとき、カルダーノの公式に触れておくことは無駄ではないと思う。

1.2 「2次方程式と2次不等式の指導」

佐々木和生（旭川西高校）

昨年度に続き、定時制の商業高校での代数分野での実践報告である。一回の説明は十分以内に抑え、きめ細かなプリント学

習を続けた結果、生徒たちは因数分解による2次方程式の解法に慣れていき、最終的には解の公式による解法まで到達したそうである。2次不等式の指導においても佐々木さんは「不等式の解」の意味を、徹底して生徒たちに問いかけている。そのように指導した結果、期末テストでは平均点が七〇点に近く、生徒たちも満足していたということである。ここで大切な視点として、2次方程式や2次不等式を学んだことで何か豊かで新しいものが生まれたかどうか、その結果として、世界はどのように変化して見えるようになったかということが大切である。また、そのような世界を提示できる学習プログラムの開発が本分科会の課題でもある。

13 「アイゼンシュタイン三角形と遊ぶ」

成田 收（数学教育協議会）

三角形の3辺の長さが7、5、3のとき最大角が一二〇度となることはよく知られている。3辺の長さがすべて整数で一つの角が一二〇度である三角形はアイゼンシュタイン三角形と呼ばれる（成田さんによれば数学者・一松信が命名者）。アイゼンシュタイン（一八二三—一八五二）は有名なドイツの数学者である。余弦定理を使えばアイゼンシュタイン三角形の3辺の長さa、b、cが簡単な関係式を満たすことがわかる。複素平

面と1の虚数立法根を利用すれば、いくらでも多くのアイゼンシュタイン三角形をつくることができる。今回の成田さんの報告により、通常のユークリッド平面において、「すべてのアイゼンシュタイン三角形は、ある互いに素な整数m、nを用いて作ることができる」ことが証明されている。レポートの最後に、a、bが百より小さい場合のすべてのアイゼンシュタイン三角形の表が載っている。これを眺めているだけでも数論と幾何学の不思議な関係が感じられ、楽しくなってくる。

（札幌英藍高校）